CONCOURS ESIGETEL - SESSION MAI/JUIN 2000

Série PC

MATHEMATIQUES 2
ALGEBRE - GEOMETRIE

DUREE 4 HEURES
COEFFICIENT 5

Nombre de pages : 3

PARTIE I

On note S l'espace vectoriel complexe des suites indéxées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire des applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$).

Pour $u \in S$, on notera selon l'usage, $u_n = u(n)$ le terme général de u d'indice $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout nombre complexe λ, on note:

$$E_\lambda = \{u \in S / \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - \lambda u_{n+1} + u_n = 0 \quad \}.$$

1°) (i) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de S.

(ii) On note: $G_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$. Montrer que:

$$\forall u \in S, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (u_n) = (1 \quad 0).(G_\lambda)^n.\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

(iii) Montrer que l'application $F : u \mapsto (u_0, u_1)$, est un isomorphisme de E_λ sur $\mathbb{C}^2$

(iv) Montrer que la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E_λ si et seulement le nombre complexe r vérifie: $r^2 - \lambda r + 1 = 0$.

(v) On suppose $\lambda^2 \neq 4$. Justifier l'existence de $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda = z + \frac{1}{z}$.

En déduire: $E_\lambda = \{(uz^n + vz^{-n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u,v) \in \mathbb{C}^2\}$.

2°) On suppose ici λ réel, différent de 2 et -2.

(i) Pour $\lambda \in]-2,2[$, montrer que l'on peut trouver $\theta \in]0,\pi[$ unique tel que: $\lambda = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$. En déduire: $E_\lambda = \{(u\cos(n\theta) + v\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}, (u,v) \in \mathbb{C}^2\}$.

(ii) Pour $\lambda \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, montrer que l'on peut trouver $\theta > 0$ et $\varepsilon \in \{-1,1\}$ uniques tels que $\varepsilon\lambda = e^\theta + e^{-\theta}$. En déduire: $E_\lambda = \{(\varepsilon^n(ue^{n\theta} + ve^{-n\theta}))_{n\in\mathbb{N}}, (u,v) \in \mathbb{C}^2\}$.

3°) Montrer que:

(i) si $\lambda = 2$, $E_\lambda = \{(u + vn)_{n\in\mathbb{N}}, (u,v) \in \mathbb{C}^2\}$.

(ii) si $\lambda = -2$, $E_\lambda = \{((-1)^n(u + vn))_{n\in\mathbb{N}}, (u,v) \in \mathbb{C}^2\}$.

PARTIE II

4°) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme U_n, tel que:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin((n+1)\theta) = \sin(\theta) U_n(\cos(\theta)).$$

ce polynome étant à coefficients réels et de degré n, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2}(X) + U_n(X) = 2XU_{n+1}(X)$$

Remarque: U_n s'appelle n-ième polynôme de Tchebychev de seconde espèce.

(ii) Expliciter U_n pour $n \in [\![0,3]\!]$, en précisant à chaque fois les racines.

5°) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n a la parité de n, et a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$. Préciser en particulier son coefficient dominant (c'est-à-dire celui de X^n).

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que U_n possède n racines distinctes dans $]-1,1[$, à savoir les nombres $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n+1}), k \in [\![1,n]\!]$.

6°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et m la partie entière de $\frac{n}{2}$.

(i) Par dérivation (par rapport à θ) de la relation définissant U_n (c'est-à-dire: $\sin((n+1)\theta) = \sin(\theta).U_n(\cos(\theta))$) montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad (x^2-1)U_n''(x) + 3xU_n'(x) = n(n+2)U_n(x)$$

(ii) Montrer que cette dernière relation reste valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(iii) En écrivant $U_n(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^{n-2k}$, déterminer une relation entre a_k et a_{k-1} pour $k \in [\![1,m]\!]$. En déduire: $U_n(X) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{n-k}^k (2X)^{n-2k}$

PARTIE III

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé et $E = \mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré $\leq p$.

7°) (i) Montrer que l'application qui à tout couple $(P,Q) \in E^2$ associe:

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\sin^2(\theta)\,d\theta = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

est un produit scalaire sur E.

(ii) Montrer que $(U_n)_{n\in[\![0,p]\!]}$ est une base orthogonale de l'espace euclidien E (muni du produit scalaire défini ci-dessus).

(iii) Préciser $\langle U_k, U_k\rangle$ pour tout $k \in [\![0,p]\!]$.

8°) On considère l'application $\varphi : E \to E$, définie par:

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P)(X) = (X^2-1)P''(X) + 3XP'(X)$$

(i) Montrer que φ est un endomorphisme de E vérifiant:

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{E}^2, \qquad \langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} P'(x)Q'(x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

(ii) En déduire que φ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E, et préciser ses valeurs propres.

9°) On suppose ici $p = 3$, et l'on considère toujours l'espace euclidien précédent E. Calculer la distance euclidienne de X^3 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

PARTIE IV

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf ceux d'indices (i,j) avec $|i-j| = 1$, qui valent 1:

$$a_{i,i+1} = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } a_{i-1,i} = 1 \text{ pour } 2 \leq i \leq n.$$

Ainsi $A_1 = (0), A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots$

On pose $P_n(x) = det(A_n - xI_n)$ pour $x \in \mathbb{C}$.

10°) (i) Calculer P_n pour $n \leq 3$ en précisant ses racines (réelles).

(ii) Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(X) + XP_{n+1}(X) + P_{n+2}(X) = 0.$$

(iii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre P_n et U_n défini à la partie II.

11 °) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a: $P_n(-2\cos(t)) = \dfrac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}$.

En déduire les valeurs propres de A_n.

12°) Soient a et b dans $\mathbb{R}$, et $I_n = diag(1, \ldots, 1)$ la matrice unité d'indice n.

Montrer que les valeurs propres de la matrice $aI_n + bA_n$ sont les réels:

$$\lambda_k = a + 2b\cos(\frac{k\pi}{n+1}), \qquad k \in [\![1, n]\!]$$

Expliciter ces valeurs lorsque $n = 3$.

13°) (i) Soit $p \in [\![1, n]\!]$, et $X_p = \begin{pmatrix} \sin(\frac{p\pi}{n+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{kp\pi}{n+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{np\pi}{n+1}) \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Que vaut A_nX_p ?
- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(\frac{kp\pi}{n+1}) = \frac{n+1}{2}$

(ii) En déduire une matrice orthogonale W_n telle que ${}^tW_n.A_n.W_n$ soit une matrice diagonale. Expliciter W_n lorsque $n = 3$.